V-4 (25 min) 9-Febrero-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Funcional Generador**

Cambio de nomenclatura

De acuerdo a resultado (I) del resumen de V-3, la siguiente integral: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$

También recordemos, de acuerdo a (IV) y (VI) de resumen de V-3:

$$\langle \boldsymbol{x^{2n}} \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x^{2n}} \cdot e^{-\frac{a}{2}x^2}\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx} = \frac{1}{a^n}(2n-1)\cdot(2n-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1$$

Para adaptar estas expresiones a la QFT cambiamos algunos nombres: $x \to \boldsymbol{\phi}$; $a \to \boldsymbol{m^2}$; $2n \to \boldsymbol{p}$ y queda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \cdot e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{m} \qquad \langle \phi^p \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi^p \cdot e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2} d\phi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdot e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2} d\phi} = \frac{1}{m^p}(p-1)\cdot(p-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1$$

Expresiones válidas cuando dentro de la integral hay exponencial del tipo: $e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2} = e^{-\,S(\phi)} \Rightarrow S(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2$

Definición de Funcional Generador : $\boldsymbol{Z[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\,S(\phi)+\phi\cdot J}\, d\phi}$ **(I)**

La función $S(\phi)$ se llama **ACCIÓN** y, en el caso más sencillo (sin interacciones en el campo) es: $S(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2$

En ese caso sencillo se puede resolver la integral (sobre ϕ) con transformación algebraica:

$$-\frac{m^2}{2}\phi^2 + \phi\cdot J = -\frac{m^2}{2}\left(\phi - \frac{J}{m^2}\right)^2 + \frac{J^2}{2m^2} \Rightarrow Z[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m^2}{2}\left(\phi-\frac{J}{m^2}\right)^2 + \frac{J^2}{2m^2}} d\phi = e^{\frac{J^2}{2m^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot e^{-\frac{m^2}{2}\left(\phi-\frac{J}{m^2}\right)^2} d\phi$$

$$Cambio \left\{ t = \phi - \frac{J}{m^2} \;;\; dt = d\phi \right\} \Rightarrow Z[J] = e^{\frac{J^2}{2m^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m^2}{2}t^2} dt = e^{\frac{J^2}{2m^2}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{m}$$

En el caso sencillo, la Función Generador básica es: $\boldsymbol{Z_0[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2 + \phi\cdot J}\, d\phi = \frac{\sqrt{2\pi}}{m} \cdot exp\left[\frac{J^2}{2m^2}\right]}$ **(II)**

En el caso sencillo, el valor promedio, (ver arriba) es: $\boldsymbol{\langle \phi^p \rangle_0 = \frac{1}{m^p}(p-1)\cdot(p-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}$ **(III)**

Cálculo general del valor promedio $\langle \phi^p \rangle$ con el Funcional Generador:

Partimos de la definición más general de valor promedio (esperado): $\boldsymbol{\langle \phi^p \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdot \phi^p \cdot e^{-\,S(\phi)}\, d\phi}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\,S(\phi)}\, d\phi}}$ **(IV)**

Es fácil ver en (I) que $Z[0] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\,S(\phi)} d\phi$ que es el denominador de la expresión (IV)

Derivamos reiteradamente el Funcional (I), respecto a J, introduciendo la derivada en la integral:

$$Z'[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\phi} \cdot e^{-\,S(\phi)+\phi\cdot J} \cdot d\phi$$

$$Z''[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\phi^2} \cdot e^{-\,S(\phi)+\phi\cdot J} \cdot d\phi$$

$$Z'''[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\phi^3} \cdot e^{-\,S(\phi)+\phi\cdot J} \cdot d\phi$$

....

Resulta fácil inducir que cuando se haga la derivada de orden p:

$$Z^{(p^a)}[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\phi^p} \cdot e^{-S(\phi)+\phi\cdot J}\, d\phi$$

$$Z^{p^a}[0] = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\phi^p} \cdot e^{-\,S(\phi)} d\phi$$

que es el numerador de la expresión (IV)

Sustituyendo en (IV) nos queda la expresión: $\boldsymbol{\langle \phi^p \rangle = \frac{Z^{(p^a)}[\,0\,]}{Z\,[\,0\,]}}$ **(V)**

NOTA: Al haber hecho $\boldsymbol{p = 2n}$ implica que las fórmulas anteriores sólo sirven para valores pares de "*p*"

Los valores impares de *p* hacen que el promedio $\langle \phi^p \rangle$ sea nulo, tal como se indica en (V) del resumen de V-3

Se muestra, con ejemplo, referido al caso más sencillo en que $\boldsymbol{S(\phi)} = \frac{m^2}{2}\phi^2$ [sirven las expresiones (II) y (III)] que se obtiene el mismo resultado de $\langle \boldsymbol{\phi^p} \rangle$ con la fórmula (III) ó la fórmula más general (V).

EJEMPLO: Hallar $\langle \boldsymbol{\phi^4} \rangle$

- Utilizando la fórmula (III) es muy sencillo:

$$\langle \phi^p \rangle = \frac{1}{m^p}(p-1)\cdot(p-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1 \qquad (\mathrm{p}=4) \rightarrow \langle \phi^4 \rangle = \frac{1}{m^4}(4-1)\cdot(4-3) = \boldsymbol{\frac{3}{m^4}}$$

- Utilizando la fórmula (V) es más complicado: $\langle \phi^4 \rangle = \frac{Z^{IV}[\,0\,]}{Z\,[\,0\,]}$

Tenemos que hallar la derivada cuarta de (II): $Z[J] = \frac{\sqrt{2\pi}}{m}\cdot exp\left[\frac{J^2}{2m^2}\right]$

$$Z'[J] = \frac{J}{m^2}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{m}\cdot exp\left[\frac{J^2}{2m^2}\right] = \frac{J}{m^2}\cdot Z[J]$$

$$Z''[J] = \frac{1}{m^2}\cdot Z[J] + \frac{J}{m^2}Z'[J] = \frac{1}{m^2}\cdot Z[J] + \frac{J^2}{m^4}\cdot Z[J] = Z[J]\left[\frac{1}{m^2}+\frac{J^2}{m^4}\right]$$

$$Z'''[J] = Z'[J]\left[\frac{1}{m^2}+\frac{J^2}{m^4}\right] + Z[J]\cdot\frac{2J}{m^4} = Z[J]\left[\frac{J}{m^4}+\frac{J^3}{m^6}\right] + Z[J]\cdot\frac{2J}{m^4} = Z[J]\left[\frac{3J}{m^4}+\frac{J^3}{m^6}\right]$$

$$Z^{IV}[J] = Z'[J]\left[\frac{3J}{m^4}+\frac{J^3}{m^6}\right] + Z[J]\left[\frac{3}{m^4}+\frac{3J^2}{m^6}\right] = Z[J]\left[\frac{3J^2}{m^6}+\frac{J^4}{m^8}\right] + Z[J]\left[\frac{3}{m^4}+\frac{3J^2}{m^6}\right] = Z[J]\left[\frac{3}{m^4}+\frac{6J^2}{m^6}+\frac{J^4}{m^8}\right]$$

En definitiva la derivada cuarta es:

$$Z^{IV}[J] = \frac{\sqrt{2\pi}}{m}\cdot e^{\frac{J^2}{2m^2}}\cdot\left[\frac{3}{m^4}+\frac{6J^2}{m^6}+\frac{J^4}{m^8}\right]$$

Para $J = 0$:

$$Z^{IV}[0] = \frac{\sqrt{2\pi}}{m}\cdot 1\cdot\left[\frac{3}{m^4}\right] = \frac{3\sqrt{2\pi}}{m^5}$$

Por otro lado:

$$Z[0] = \frac{\sqrt{2\pi}}{m}\cdot 1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{m}$$

$$\Longrightarrow \qquad \langle \phi^4 \rangle = \frac{Z^{IV}[\,0\,]}{Z\,[\,0\,]} = \frac{\frac{3\sqrt{2\pi}}{m^5}}{\frac{\sqrt{2\pi}}{m}} = \boldsymbol{\frac{3}{m^4}}$$

Vemos que obtenemos el mismo resultado con ambas fórmulas, aunque con ésta última ha sido mucho más laborioso. No obstante, en QFT a será necesario utilizar la fórmula (V) que es más general, puesto que la (III) sólo es aplicable en el caso que la ACCIÓN sea $S(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2$